場合の数

2　順列／隣り合う

2　演習題

$\boxed{\text{GI}}$,$\boxed{\text{FU}}$,G,I,U の順列で，$\boxed{\text{GI}}$ が $\boxed{\text{FU}}$ よりも左にあるような順列は，
$\boxed{\text{GI}}$ が $\boxed{\text{FU}}$ の位置関係がひと通りに定まってしまうから，
$\boxed{\text{GI}}$ と $\boxed{\text{FU}}$ を区別しない場合の順列と同じである。

よって，その数は $\dfrac{5!}{2!}=60$

ところが，この順列では，たとえば，$\boxed{\text{GI}}$,G,I,$\boxed{\text{FU}}$,U と G,I,$\boxed{\text{GI}}$,$\boxed{\text{FU}}$,U が区別される。
このような順列は，U の位置により，4 通りある。
よって，並べ方は，$60-4=56$ 通り。

補足

$\boxed{\text{FU}}$,G,I,$\boxed{\text{GI}}$,U のように $\boxed{\text{GI}}$ が $\boxed{\text{FU}}$ よりも右にあるような順列は，
上の 60 通りに含まれていないので考慮してはいけない。

4　順列／連続する

(1) 別解：余事象を使って解く

順列の総数＝$\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}=84$　・・・①

●が連続しない場合の数

　○　○　○　○　○　○
↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑

7 つの↑から 3 つ選んで●を入れればよいから ${}_7C_3=35$　・・・②

①－②より，$84-35=49$ 通り

(2) 別解：連続するものをひとまとめにして解く

下図より，連続する○を入れる場所は 4 つある。

　●　●　●
↑　↑　↑　↑

○○○○○○を入れる場合：4 通り
○○○○○と○を入れる場合：$4\cdot 3$ 通り
○○○○と○○を入れる場合：$4\cdot 3$ 通り
○○○○と○と○を入れる場合：$4\cdot\dfrac{3\cdot 2}{2}$ 通りまたは $4\cdot{}_3C_2$ 通り

よって，$4+4\cdot 3+4\cdot 3+4\cdot\dfrac{3\cdot 2}{2}=40$ 通り

5　円順列

5　演習題

(3)

組の円順列の数は $(4-1)!=6$

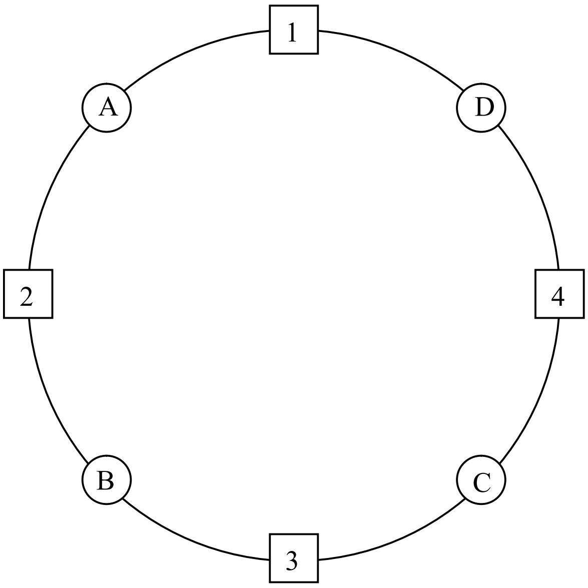
男女交互になる座り方は 2 通り

よって，$6\times 2=12$ 通り

(4)

女子の座り方は，次表のように整理するとわかりやすい

	①	②	③	④
A	×	×		
B		×	×	
C			×	×
D	×			×



これより，

①が B を選ぶと④は A を選ぶしかない。すると③は D を，②は C を選ぶしかない。

①が C を選ぶと②は D を選ぶしかない。すると③は A を，④は B を選ぶしかない。

6　順列／増加していく

(2) 別解：出る目の種類の数で場合分けして解く

目の順列はただ 1 通りに決まるから，目の組合せだけを考えればよい。

目が 4 種類の場合

4 種類の目の選び方だけでよいから，${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通り

目が 3 種類の場合

3 種類の目の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

選んだ目を a, b, c とすると，組合せは $(a, a, b, c), (a, b, b, c), (a, b, c, c)$ の 3 通り

よって，$20 \cdot 3 = 60$ 通り

目が 2 種類の場合

2 種類の目の選び方は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り

選んだ目を a, b とすると，組合せは $(a, b, b, b), (a, a, b, b), (a, b, b, b)$ の 3 通り

よって，$15 \cdot 3 = 45$ 通り

目が 1 種類の場合

1 種類の目の選び方だけでよいから，${}_6\mathrm{C}_1 = 6$ 通り

ゆえに，$15 + 60 + 45 + 6 = 126$ 通り

(3) 別解：出る目の種類の数で場合分けして解く

目が 4 種類の場合

4 種類の目の選び方だけでよいから ${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通り

選んだ目を

目が 3 種類の場合

3 種類の目の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り

選んだ目を a, b, c （$a < b < c$）とすると，組合せは $(a, b, c, c), (a, a, b, c)$ の 2 通り

よって，$20 \cdot 2 = 40$ 通り

目の数が 2 種類の場合

2 種類の目の選び方は ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り

選んだ目を a, b （$a < b$）とすると，組合せは (a, a, b, b) の 1 通り

よって，15 通り

ゆえに，$15 + 40 + 15 = 70$ 通り

7　重複組合せ

7　演習題

各位の数の和が 10 になる 4 桁の自然数を $abcd$ とすると、

これを満たす $\{a, b, c, d\}$ の組の数を求めればよく，

その組は，$a+b+c+d=10$，$0 \leq a, b, c, d \leq 10$ を満たす $\{a, b, c, d\}$ の組から，

$a=0$ の組と $a=10$ の組を除いたものである。

$a+b+c+d=10$，$0 \leq a, b, c, d \leq 10$ を満たす $\{a, b, c, d\}$ の組の数

$\quad {}_{13}\mathrm{C}_3 = 286$

$a=0$ の組の数

$\quad b+c+d=10$，$0 \leq b, c, d \leq 10$ を満たす $\{b, c, d\}$ の組の数より，${}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$

$a=10$ の組の数

$\quad \{a, b, c, d\} = \{10, 0, 0, 0\}$ の 1

よって，

各位の数の和が 10 になる自然数の数は，$286-(66+1)=219$

8　分割／組を区別しない

8　演習題

(3)

「人」は区別する約束だから，はじめ女子を 3 つのグループに分けると，
その時点で区別ができる 3 つのグループができ，
男子は区別できる 3 つのグループに分けられることになる。

補充問題

A,A,A,B,C,D,E,F,G,H の文字が書かれたカードが 10 枚ある。
これらのカードを 2 枚 1 組として 5 つに分ける。
このような分け方は全部で何通りあるか。

例題を解く前に伏線問題を 1 つ

A, B, C, D, E, F, G, H の文字が書かれたカードが 8 枚ある。
これらのカードを 2 枚 1 組として 4 つに分ける。
このような分け方は全部で何通りあるか。

解１：ふつうに解く

4 組の区別はないから，$\dfrac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{4!} = 105$ 通り

解 2：1 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組とし，A 組，残り 3 組の順に組をつくると，
A 組のつくり方の場合の数は 7 通り，
残りの 3 組の区別はないから，$\dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$ 通り。
よって，$7 \times 15 = 105$ 通り

解 3：2 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組，B の組を B 組とする。

ｉ）A と B が同じ組にならない場合
A 組，B 組，残り 2 組の順に組をつくると，
A 組のつくり方の場合の数＝6 通り，B 組のつくり方の場合の数＝5 通り，
残りの 2 組の区別はないから，$\dfrac{{}_4C_2 \times {}_2C_2}{2!} = 3$ 通り
よって，$6 \times 5 \times 3 = 90$ 通り

ⅱ）A と B が同じ組，すなわち AB 組になる場合
AB 組のつくり方は 1 通り，残り 3 組の区別はないから，$\dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$ 通り
よって，$1 \times 15 = 15$ 通り

ｉ），ⅱ）より，90+15＝105 通り

解 4：3 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組，B の組を B 組，C の組を C 組とする。

ⅰ）A,B,C が同じ組にならない場合

A 組，B 組，C 組，残り 1 組の順に組をつくると，

A 組のつくり方の場合の数＝5 通り，B の組のつくり方の場合の数＝4 通り，

C の組のつくり方の場合の数＝3 通り，残りの 1 組のつくり方の場合の数＝1 通り

よって，$5\times4\times3\times1=60$ 通り

ⅱ）A,B,C の間で 1 組できる場合

A,B,C の間の組のつくり方の場合の数は，AB 組，BC 組，CA 組の 3 通り，

あぶれたカードでの組のつくり方＝5 通り，

残り 2 組の区別はないから，$\dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=3$ 通り

よって，$3\times5\times3=45$ 通り

ⅰ），ⅱ）より，60+45=105 通り

それでは，例題の解説を

ⅰ）A だけの組ができない場合

とりあえず 3 つの A を A_1,A_2,A_3 に分け，A_1 組，A_2 組，A_3 組と区別し，

A_1 組，A_2 組，A_3 組，残り 2 組の順に組をつくると，

A_1 の組のつくり方の場合の数＝7 通り，A_2 の組のつくり方の場合の数＝6 通り，

A_3 の組のつくり方の場合の数＝5 通り，残り 2 組の区別はないから，$\dfrac{{}_4C_2\cdot{}_2C_2}{2!}=3$ 通り

よって，$7\times6\times5\times3=630$ 通り

続いて，A_1,A_2,A_3 の区別を解消する。

たとえば，（A_1B,A_2C,A_3D），（A_1B,A_2D,A_3C），（A_1C,A_2B,A_3D），（A_1C,A_2D,A_3B），（A_1D,A_2B,A_3C），（A_1D,A_2C,A_3B）の 6 組はすべて（AB,AC,AD）の 1 組になってしまう。

つまり，区別を解消すると，場合の数が A_1,A_2,A_3 の順列分の 1，すなわち $\dfrac{1}{3!}$ になる。

よって，$630\times\dfrac{1}{3!}=105$ 通り

ⅱ）A だけの組ができる場合

A だけの組のつくり方の場合の数＝1 通り，

残りは A,B,C,D,E,F,G,H で組をつくるから $\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=105$ 通り

$1\times105=105$ 通り

ⅰ），ⅱ）より 110+110＝220 通り

10　最短経路

(2)

略解

$n(\mathrm{P})=1$，$n(\mathrm{Q})=6\cdot{}_6\mathrm{C}_2=90$，$n(\mathrm{R})=35\cdot{}_3\mathrm{C}_1=105$，$n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})=0$，$n(\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})=54$，
$n(\mathrm{R}\cap\mathrm{P})=0$，$n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})=0$ より，

$$\begin{aligned}n(\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R})&=n(\mathrm{P})+n(\mathrm{Q})+n(\mathrm{R})-n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q})-n(\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})-n(\mathrm{R}\cap\mathrm{P})+n(\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}\cap\mathrm{R})\\&=1+90+105-0-54-0+0\\&=142\end{aligned}$$

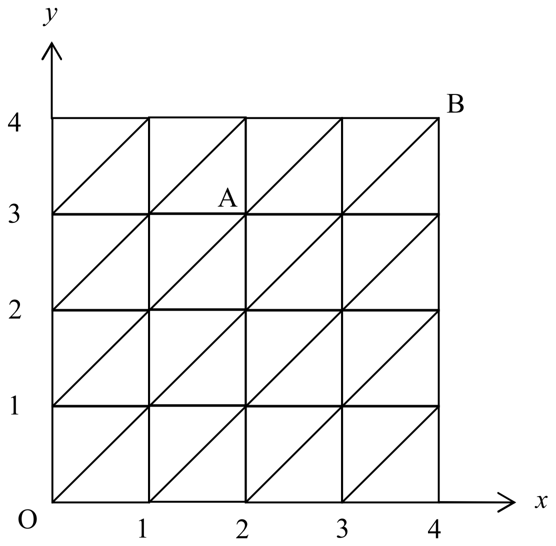
よって，

$$\begin{aligned}n\left(\overline{\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R}}\right)&=n(U)-n(\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R})\\&={}_{10}\mathrm{C}_4-142\\&=210-142\\&=68\end{aligned}$$

10　演習題

(1)　略解

下図のように座標をとる。



格子点間の東方向の移動は$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，北方向の移動は$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$だから，北東方向の移動は$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

よって，O 地点から A 地点への移動は，$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+u\\t+u\end{pmatrix}$

これより，$(s,t,u)=(2,3,0),(1,2,1),(0,1,2)$

よって，$\dfrac{5!}{2!\cdot3!}+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}=10+12+3=25$

(2)

(1)と同様にして，

A 地点から B 地点への移動は$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+u\\t+u\end{pmatrix}$　$\therefore(s,t,u)=(2,1,0),(1,0,1)$

よって，A 地点から B 地点への移動仕方の数は，$\dfrac{3!}{2!}+2!=5$

ゆえに，O 地点から A 地点を通って B 地点につく移動の仕方の数は，

$25\times 5=125$　・・・①

O 地点から B 地点への移動は$\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s+u\\t+u\end{pmatrix}$　$\therefore(s,t,u)=(4,4,0),(3,3,1),(2,2,2),(1,1,3),(0,0,4)$

よって，O 地点から B 地点への移動の仕方の数は，

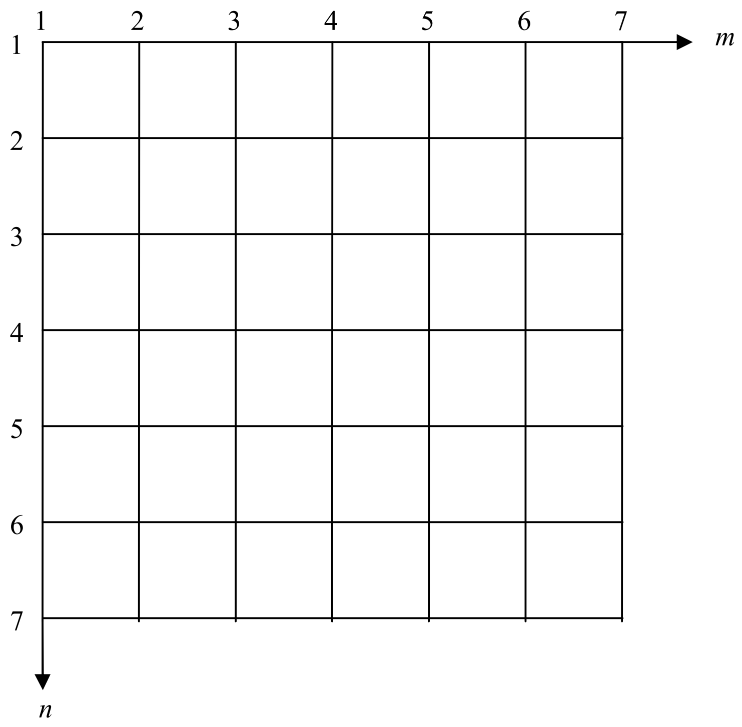
$\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}+\dfrac{7!}{3!\cdot 3!}+\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}+\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{4!}{4!}=70+140+90+20+1=321$　・・・②

①，②より，O 地点から A 地点を通らずに B 地点に行く場合の数は，$321-125=196$

11　図形

11　演習題

（ア）



1 辺の長さが k の正方形について，

縦の長さが k となる 2 つの横線を n と $n+k$ とすると，

$1\leq n\leq 7$ かつ $n+k\leq 7$ より，$1\leq n\leq 7-k$

横の長さが k となる 2 つの縦線を m と $m+k$ とすると，

$1\leq m\leq 7$ かつ $m+k\leq 7$ より，$1\leq m\leq 7-k$

これより，

$k=1$ の正方形の数

　$1\leq n\leq 6$，$1\leq m\leq 6$ より，$6^2=36$

$k=2$ の正方形の数

　$1\leq n\leq 5$，$1\leq m\leq 5$ より，$5^2=25$

$k=3$ の正方形の数

　$1\leq n\leq 4$，$1\leq m\leq 4$ より，$4^2=16$

$k=4$ の正方形の数

　$1\leq n\leq 3$，$1\leq m\leq 3$ より，$3^2=9$

$k=5$ の正方形の数

　$1\leq n\leq 2$，$1\leq m\leq 2$ より，$2^2=4$

$k=6$ の正方形の数

　1

（イ）

正 n 角形の 3 つの頂点を結んでできる鈍角三角形の数について

n が偶数のときの鈍角三角形の数

手順 1

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし，A から反時計回りに順に各頂点に $1,2,\cdots,k,\cdots,n-1$ と番号をつけ，まず頂点 A を鈍角とする鈍角三角形の数を手順 2 で求める。

手順 2

番号 k を選ぶと，k と円の直径をなす頂点の番号は，

頂点の間の数が n であることから，$k+\dfrac{n}{2}$ である。

したがって，k を選んだとき，A が鈍角であるための残りの頂点の番号は，

$k+\dfrac{n}{2}+1$，$k+\dfrac{n}{2}++2$，$\cdots$，$n-1$ となる。

よって，k を選んだときの残りの頂点の数を a_k とすると，

$$a_k=(n-1)-\left(k+\frac{n}{2}+1\right)+1=\frac{n}{2}-k-1$$

鈍角三角形の数は残りの頂点の数で決まるから，
頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数も a_k である。

また，$k+\dfrac{n}{2}+1\leq n-1$ かつ $k\geq 1$ より，$1\leq k\leq \dfrac{n}{2}-2$

よって，頂点 A を鈍角とする三角形の数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-2}a_k&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{\frac{n}{2}-4}+a_{\frac{n}{2}-3}+a_{\frac{n}{2}-2}\\&=\left(\frac{n}{2}-2\right)+\left(\frac{n}{2}-3\right)+\left(\frac{n}{2}-4\right)+\cdots+3+2+1\\&=\frac{1+\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}\times\left(\frac{n}{2}-2\right)\\&=\frac{(n-2)(n-4)}{8}\end{aligned}$$

補足：等差数列の和＝平均値×項数＝$\dfrac{初項の値＋末項の値}{2}\times$項数

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから，

鈍角三角形の総数＝$\dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$

n が奇数のときの鈍角三角形の数

手順 1

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし，

A から反時計回りに順に各頂点に $1,2,\cdots,k,\cdots,n-1$ と番号をつけ，

頂点 A が鈍角の場合で考える。

手順 2

頂点 k を選ぶと，頂点 k と円の直径をなす頂点は，

頂点の間の数が n であることから，頂点 $k+\dfrac{n}{2}$ である。

ところが n は奇数である。

したがって，頂点 k を選んだとき，A が鈍角であるための残りの頂点は，

$k+\dfrac{n+1}{2}$， $k+\dfrac{n+1}{2}+1$， $\cdots$， $n-1$ となる。

よって，頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数を b_k とすると，

$$b_k=(n-1)-\left(k+\frac{n+1}{2}\right)+1=\frac{n-1}{2}-k$$

また， $k+\dfrac{n+1}{2}\leq n-1$ かつ $k\geq 1$ より， $1\leq k\leq\dfrac{n-3}{2}$

よって，頂点 A が鈍角の三角形の数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}b_k&=\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\frac{n-7}{2}+\cdots+3+2+1\\&=\frac{\frac{n-3}{2}+1}{2}\times\frac{n-3}{2}=\frac{(n-3)(n-1)}{8}\end{aligned}$$

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから，

鈍角三角形の総数$=\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$